Respuestas Segundo Parcial MA-1111 (A).

1. (3 ptos. c/u)

(a) $$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2-x-3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2(x+1)(x-\frac{3}{2})}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2(x-\frac{3}{2})}{(x+1)} = -\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2-(2+x)}{2(2+x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(2+x)} = -\frac{1}{4}$$

(c) $$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\text{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{\text{sen}(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{(y)(2-y)}{\text{sen}(\pi(1-y))} = \lim_{y\to 0} \frac{(y)(2-y)}{\text{sen}(\pi-\pi y))} =$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{(y)(2-y)}{\text{sen}(\pi)\cos(\pi y)-\text{sen}(\pi y)\cos(\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{(y)(2-y)}{\text{sen}(\pi y)} = \lim_{y\to 0} \Big(\frac{\pi y}{\text{sen}(\pi y)}\Big)\Big(\frac{2-y}{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}$$

2. (5 puntos)

$f(x)$ es continua en el intervalo $(-\infty,-1)$ pues en ese intervalo $f(x)$ es constante.

$f(x)$ es continua en el intervalo $(-1,1)$ pues en ese intervalo $f(x)=x^3$, una función polinómica de grado 3.

$f(x)$ es continua en el intervalo $(1,2)$ pues en ese intervalo $f(x)=x-1$, una función polinómica de grado 1.

Falta estudiar la continuidad en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

$$f(-1) = -1 = \lim_{x\to -1^-} -1 = \lim_{x\to -1^+} x^3 = -1$$

$$f(1) = 1 = \lim_{x\to 1^-} x^3 \neq \lim_{x\to 1^+} x-1 = 0$$

Es decir, es continua en -1 y discontinua en 1.

En resumen, $f(x)$ es continua en $(-\infty,1)\cup(1,2)$

3. (4 puntos)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-3} - \sqrt{2x-3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2(x+h)-3} - \sqrt{2x-3})}{h}\frac{(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3})}{(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)-3 - 2x+3}{h(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3})} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{(\sqrt{2(x+h)-3} + \sqrt{2x-3})} = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}
\end{aligned}$$

4. (4 puntos)

En un intervalo "pequeño" alrededor de $x = 0$, se tiene que $|1 - x| = 1 - x$ y, por lo tanto,

$$f(x) = \frac{|1-x|\text{sen}(x)}{1+\cos(x)} + 1 = \frac{(1-x)\text{sen}(x)}{1+\cos(x)} + 1$$

Entonces

$$f'(x) = \frac{[-\text{sen}(x) + (1-x)\cos(x)][1+\cos(x)] + \text{sen}(x)(1-x)\text{sen}(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

Por lo tanto:

$$f'(0) = \frac{[-\text{sen}(0) + \cos(0)][1+\cos(0)] + \text{sen}^2(0)}{(1+\cos(0))^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

El punto de tangencia es $(0, 1)$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{2}\,x$$

5. (4 puntos)

Considero la función $f(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[0, 2]$.

(a) $f(x)$ es continua en $[0, 2]$

(b) $f(0) = -2$ y $f(2) = 2$

Por el Teorema del Valor Intermedio existe un $c \in (0, 2)$ tal que:

$$f(c) = 0$$

Como $f(c) = c^2 - 2$, se tiene que $c^2 - 2 = 0$ y por lo tanto $c^2 = 2$.

6. (4 puntos)

Dado $\epsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $|(x^2+3x+1) - 11| < \epsilon$

Veamos:

$$|(x^2 + 3x + 1) - 11| = |x^2 + 3x - 10| = |(x+5)(x-2)| = |x+5|\,|x-2|$$

Si $|x - 2| < 1$ entonces $|x + 5| < 8$. Por lo tanto, si $\delta \leq \min\{1, \frac{\epsilon}{8}\}$ y $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene que:

$$|(x^2 + 3x + 1) - 11| = |x+5|\,|x-2| < 8\delta \leq 8\frac{\epsilon}{8} = \epsilon$$